

# Mathematische Beschreibung einfacher Zusammenhänge

Dirk Windelberg<sup>1</sup>

<sup>1</sup> AG Qualität, Leibniz Universität Hannover, Mathematik - [www.windelberg.de/agq](http://www.windelberg.de/agq)

## Einleitung

Standardmäßig wird oft angenommen, dass es ausreichend, eine lineare Regression für beliebige Zusammenhänge durchzuführen. Hier soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, dass ein solches Verfahren nicht immer zum gewünschten Ergebnis führt.

Es soll die Abhängigkeit zwischen

- der Fähigkeit, mathematische Formulierungen zu verstehen, und
- dem Alter

durch eine Kurve (mathematisch) beschrieben werden.

Randbedingungen: Es wird eine Funktion  $f$  gesucht, die definiert ist für zulässige Alter von 5 Jahren bis zu 100 Jahren (also ist der Definitionsbereich das Intervall  $[5, 100] \in \mathbb{R}$ ), und deren Wert (als Fähigkeit) eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 ist (wir wollen der maximalen Fähigkeit den Wert 1 geben).

Dann suchen wir eine Funktion

$$f : [0, 100] \in \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \in \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften

- a) mit 5 Jahren ist die Fähigkeit 0, also  $f(5) = 0$
- b) mit 25 Jahren ist die Fähigkeit optimal:  $f(25) = 1$
- c) mit 100 Jahren ist die Fähigkeit 0:  $f(100) = 0$

## 1. Ansatz: lineare Regression

Annahme 1 Die Funktion  $f$  lässt sich beschreiben in der Form

$$f(x) = a \cdot x + b$$

wobei  $a$  und  $b$  so bestimmt werden sollen, dass die Summe der Abstände der Messpunkte von dieser Geraden minimal ist.

Messpunkte:

- a) für  $x=5$  Jahre: Fähigkeit 0, also  $f(5) = 0$ .
- b) für  $x=25$  Jahre: Fähigkeit optimal:  $f(25) = 1$
- c) für 100 Jahre: Fähigkeit 0:  $f(100) = 0$

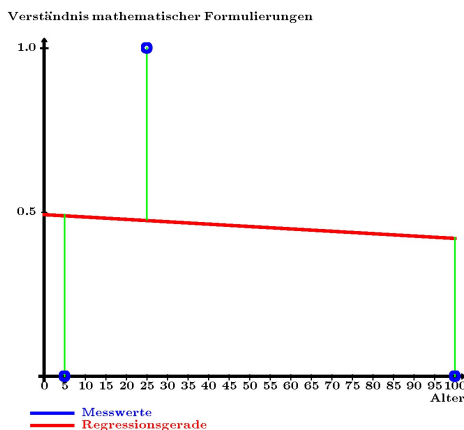


Abbildung 1: lineare Regression

Diese Kurve entspricht nicht der Annahme 1!

## 2. Ansatz: Sinuskurve

Annahme 2 Die Funktion  $f$  lässt sich beschreiben in der Form

$$f(x) = \sin(z(x))$$

wobei  $z$  eine Funktion ist mit

$$z : [0, 100] \in \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi] \in \mathbb{R},$$

für die gilt

- a) mit 5 Jahren: Fähigkeit 0, also  $z(5) = 0$ .
- b) mit 25 Jahren: Fähigkeit optimal:  $z(25) = \frac{\pi}{2}$
- b) mit 100 Jahren: Fähigkeit 0:  $z(100) = \pi$

Auch die Funktion  $z(x)$  kann keine Gerade sein. Daher formulieren wir folgende

Annahme 3 Die Funktion  $z$  lässt sich beschreiben in der Form

$$z(x) = u + v \cdot x + w \cdot x^2$$

wobei  $u$ ,  $v$  und  $w$  geeignet zu wählende reelle Zahlen sind.

Nach Annahme 2 muss also gelten:

$$0 = z(5) = u + v \cdot 5 + w \cdot 5^2 = u + v \cdot 5 + w \cdot 25 \quad (\text{a1})$$

$$\frac{\pi}{2} = z(25) = u + v \cdot 25 + w \cdot 625 \quad (\text{b1})$$

$$\pi = z(100) = u + v \cdot 100 + w \cdot 10\,000 \quad (\text{c1})$$

Aus diesen drei Bedingungen (a1), (b1) und (c1) können wir  $u$ ,  $v$  und  $w$  ausrechnen und erhalten folgende Kurve:

Verständnis mathematischer Formulierungen

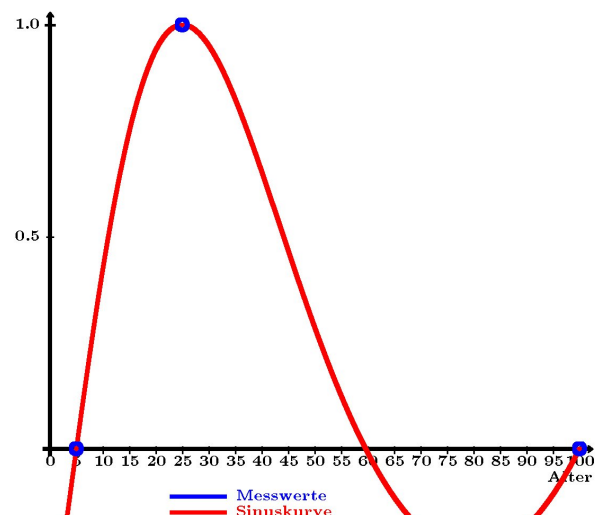


Abbildung 2: Zweiter Versuch

Auch diese Kurve entspricht nicht den Anforderungen, denn nach dieser Kurve wäre bereits ab 60 Jahren die Fähigkeit erloschen, mathematische Formulierungen zu verstehen.

Es sind also weitere Versuche notwendig.

### 3. Ansatz: Parabel

**Annahme 4** Die Funktion  $f$  lässt sich beschreiben in der Form  $f(x) = t + u \cdot x + v \cdot x^2 + w \cdot x^3$

wobei  $t, u, v$  und  $w$  so zu wählende reelle Zahlen sind, dass gilt

- a) für  $x=5$  Jahre: Fähigkeit 0, also  $f(5) = 0$
- b) für  $x=25$  Jahre: Fähigkeit optimal:  $f(25) = 1$
- c) für  $x=100$  Jahre: Fähigkeit 0:  $f(100) = 0$

Entsprechende Rechnung ergibt: Wir haben vier Parameter und drei Gleichungen.

Es kann z.B.  $w$  beliebig gewählt werden; dann ergeben sich

$$t = -\frac{1}{3} - 12\,500 \cdot w$$

$$u = \frac{7}{100} + 3\,125 \cdot w$$

und  $v = -\frac{1}{1500} - 130 \cdot w$ .

Damit ergibt sich folgendes Bild:

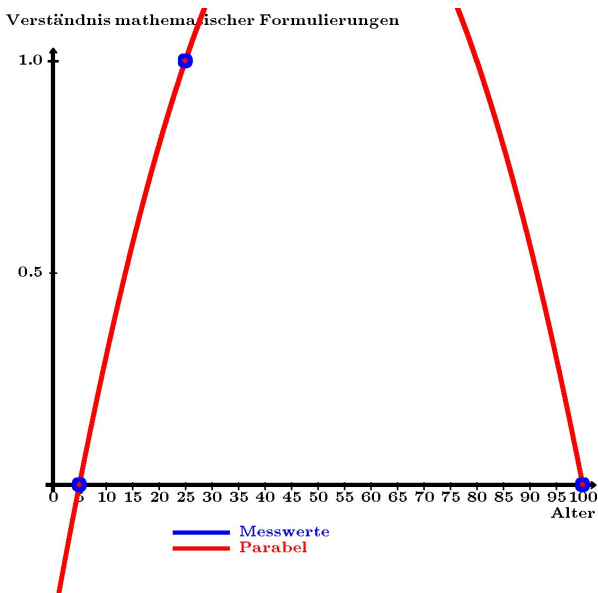


Abbildung 3: Dritter Versuch: Parabel

Die Bedingung b) ist verletzt: nicht mit 25 Jahren ist das Optimum erreicht, sondern erst mit 50. Also muss weitergesucht werden.

### 4. Ansatz: kubische Parabel

Da wir fordern, dass das Maximum der Kurve bei einem Alter von 25 Jahren liegt, dann bedeutet dies mathematisch in der Annahme 4:

$$f'(25) = 0$$

also wegen  $f(x) = t + u \cdot x + v \cdot x^2 + w \cdot x^3$

$$u + 2 \cdot v \cdot 25 + 3 \cdot w \cdot 25^2 = 0$$

Entsprechende Rechnung ergibt:

$$t = -\frac{23}{36}$$

$$u = \frac{527}{3\,600}$$

$$v = -\frac{173}{45\,000}$$

und  $w = \frac{11}{450\,000}$

Dann ergibt sich die in Abbildung 4 angegebene Kurve.

Verständnis mathematischer Formulierungen

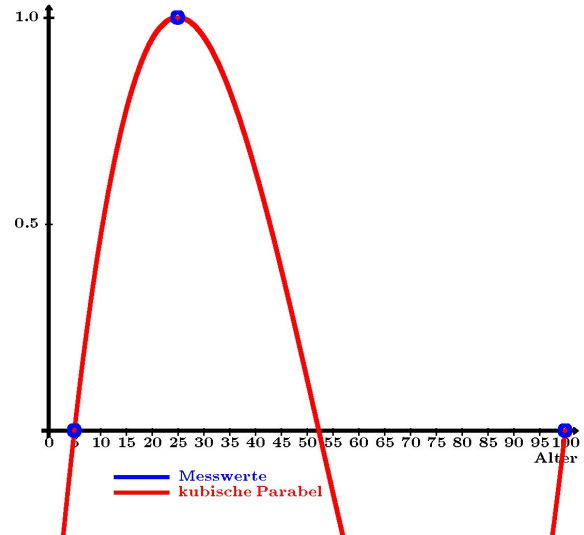


Abbildung 4: Vierter Versuch: kubische Parabel

Auch diese Abbildung zeigt, dass die Kurve nicht den gesuchten Zusammenhang beschreibt.

### 5. Ansatz: Kegelschnitt, gedreht

Nach dem erfolglosen vierten Versuch (wieder ist die Fähigkeit, mathematische Formulierungen zu verstehen, mit 52 Jahren gleich 0) soll nun ein gedrehter Kegelschnitt betrachtet werden, bei dem im Punkt (25, 1) ein Maximum liegt und daher die Ableitung  $\frac{dy}{dx} = 0$  gilt.

Allgemeiner Ansatz:

$$r \cdot x^2 + s \cdot x \cdot y + t \cdot y^2 + u \cdot x + v \cdot y + w = 0$$

Wenn diese Funktion nach  $x$  abgeleitet wird, ergibt sich

$$2 \cdot r \cdot x + s \cdot (x \cdot y' + y) + 2 \cdot t \cdot y \cdot y' + u + v \cdot y' = 0$$

und damit - wegen  $y' = 0$  - die einfache Bedingung

$$2 \cdot r \cdot x + s \cdot y + u = 0$$

Zusammen mit den obigen Forderungen a) bis c) wird daraus die Gleichung

$$x^2 + 55 \cdot x \cdot y - 105 \cdot x + 125 \cdot y + 500 = 0$$

Verständnis mathematischer Formulierungen

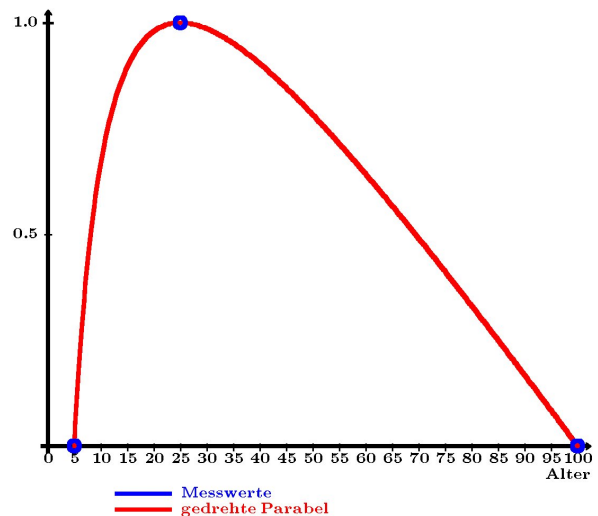


Abbildung 5: Fünfter Versuch: gedrehter Kegelschnitt

Dieser Versuch war erfolgreich